
磁流体
Magnetohydrodynamics

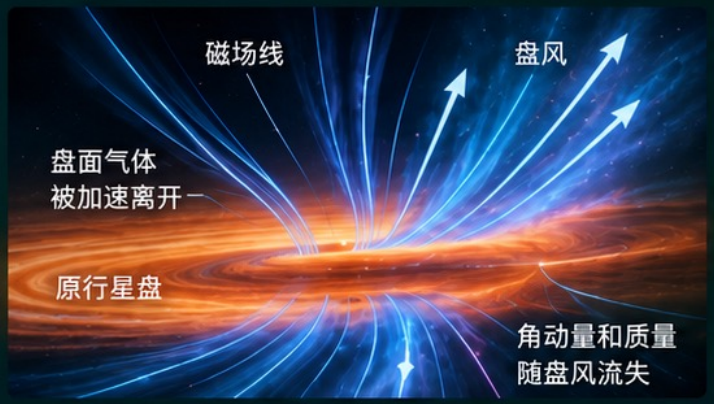
磁场在原行星盘中的作用

磁场通过驱动盘风、引发磁旋转不稳定性（MRI）湍流，
以及产生Maxwell应力，控制原行星盘的角动量输运、
气体演化和行星形成环境。



① 盘风（Magnetized Disk Wind）

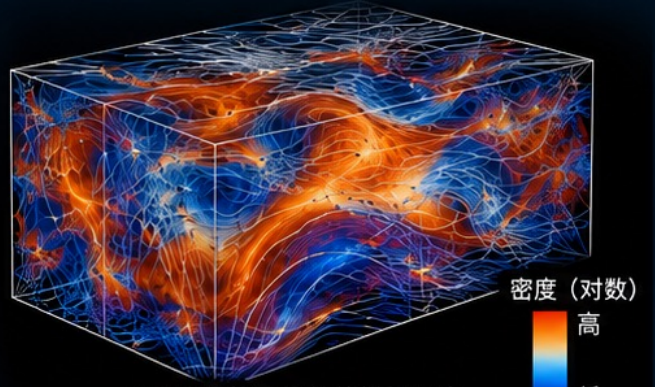
磁场将盘面气体加速并沿开放的磁场线抛出，形成盘风，带走角动量和部分质量，影响盘的演化寿命和行星形成的气体环境。



- 磁心力沿开放磁场线加速气体（磁离心盘风）
- 带走角动量，使盘吸积
- 影响盘的质量损失率、化学与温度结构

② 磁旋转不稳定性（MRI）湍流

在弱磁场、差速旋转的电离盘中，MRI 使微小的磁扰动迅速放大，产生湍流，将角动量向外输运。



MRI 湍流的三维数值模拟示意

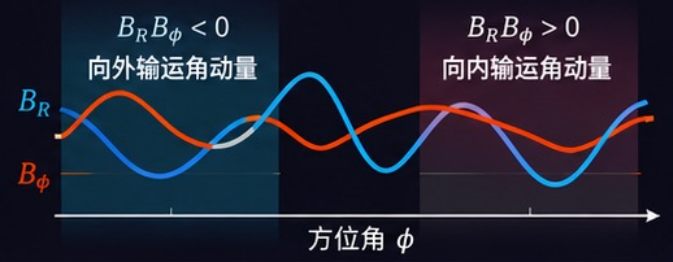
- 发生条件：弱磁场 + 差速旋转（dΩ/dr < 0）
- 磁扰动指数增长，发展为湍流
- 湍流产生有效黏性，驱动角动量输运（α 效应的物理来源）
- 影响盘的结构、温度、尘埃演化与行星形成过程

③ Maxwell 应力（磁应力）

湍流和有序磁场共同产生的 Maxwell 应力，是原行星盘中角动量输运的主要机制之一。

$$T_{R\phi}^{(\mathrm{Max})} = -\frac{B_R B_\phi}{4\pi}$$

B_R：径向磁场分量
B_ϕ：方位向磁场分量
$T_{R\phi}^{(\mathrm{Max})}$：Maxwell 应力



- 由磁场的径向与方位向分量的相关性产生
- 在湍流中通常 $\langle -B_R B_\phi / 4\pi \rangle > 0$，驱动角动量外输运
- 与 Reynolds 应力共同构成总的湍流应力

核心结论 | 磁场通过盘风、MRI 湍流及其产生的 Maxwell 应力，实现原行星盘的角动量输运，控制盘的吸积、质量损失和演化，并为行星形成提供关键的物理环境。

磁场在原行星盘中的作用

盘风、MRI 湍流与 Maxwell 应力共同调控角动量输运与盘演化

磁化盘风
（盘风）

盘风（Disk Wind）

磁场将盘面气体加速并沿开放的磁场线抛出，带走角动量与质量，影响盘的演化与行星形成环境。

气体外流
（质量损失）

带走角动量

MRI 湍流

在弱磁场、差速旋转的盘电离层中，MRI 使微小的磁扰动迅速放大，产生湍流，将角动量向外输运。



Maxwell 应力

磁场的径向与方位向分量相关，产生 Maxwell 应力，将角动量向外输运。

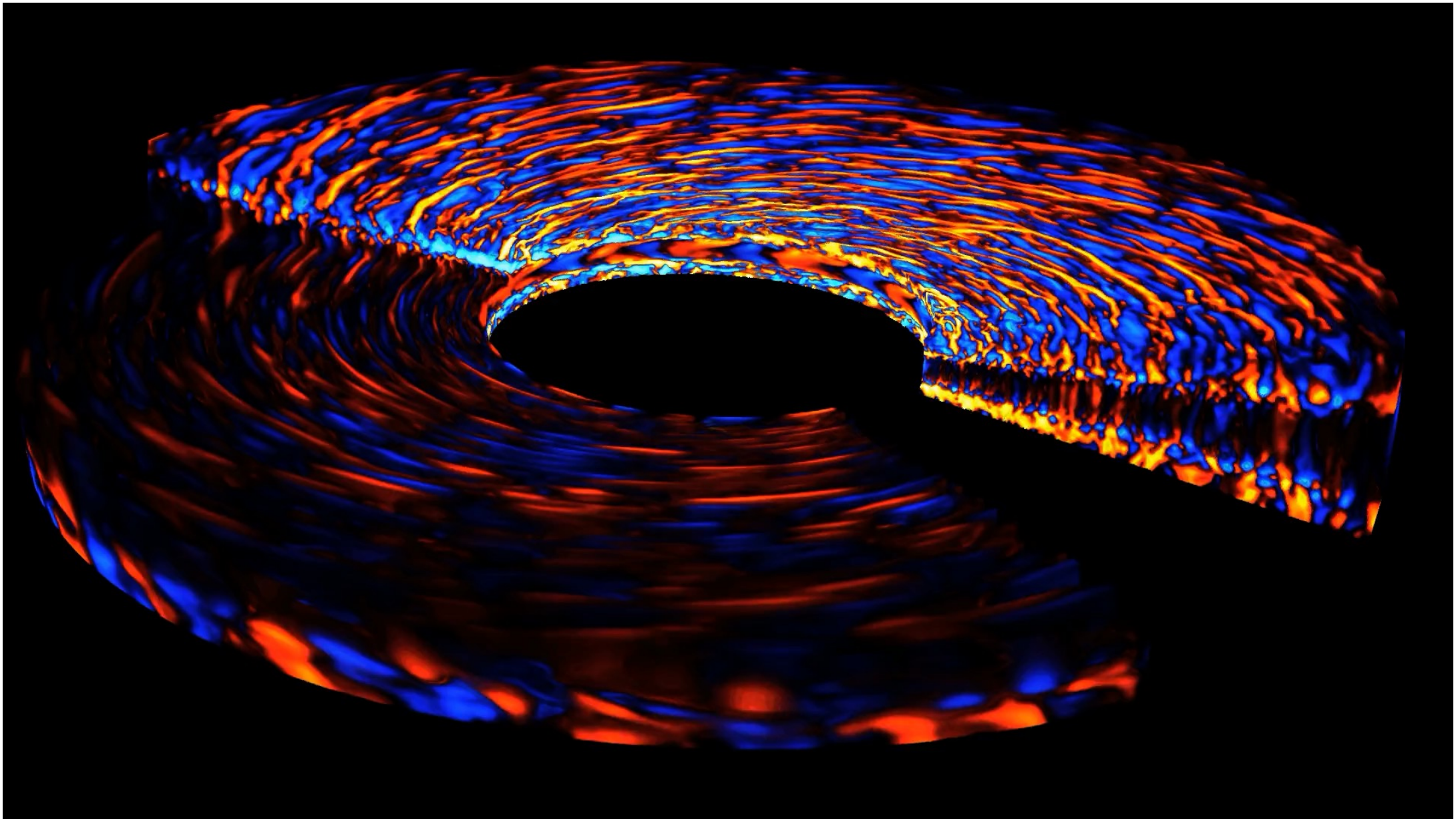
$$T_{R\phi}^{(\mathrm{Max})} = -\frac{B_R B_\phi}{4\pi}$$

B_R（径向分量）

B_ϕ（方位向分量）

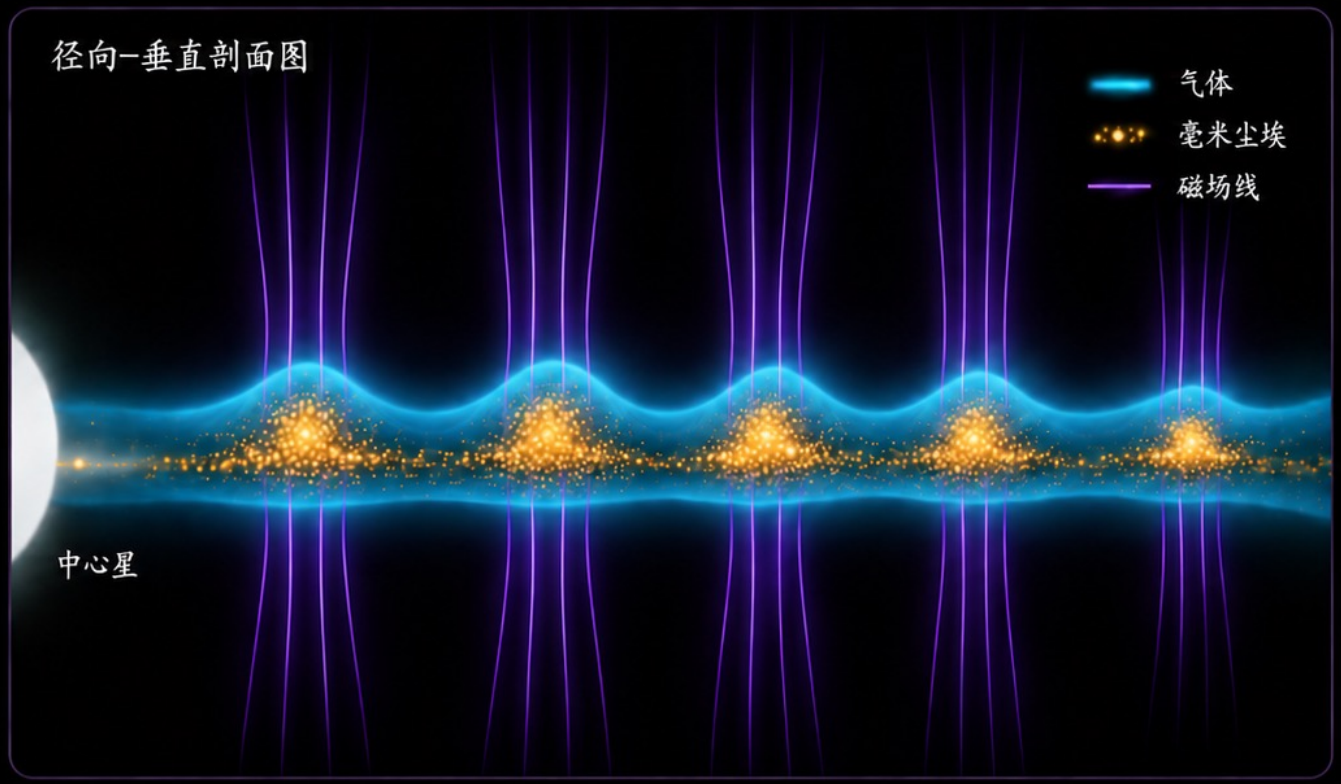
角动量向外输运

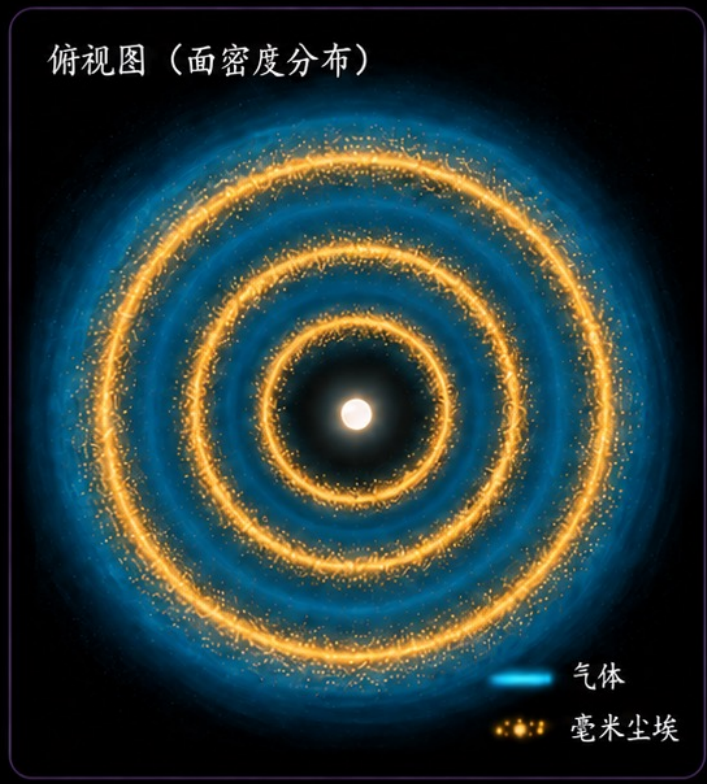
磁化盘风
（盘风）



MHD / zonal flow

ORIGINS OF RINGS AND GAPS






原行星盘中的磁流体
恒星 FUV / X 射线
宇宙射线
电离表层 · 磁场耦合
低密度 · 高电离度 ·
弱电离中层 ·
高密度 · 低电离度 · 非理想 MHD 主导
0.1 AU
0.1 AU
欧姆耗散
充分电离 · 理想 MHD
100 AU
0.1 – 100 AU：非理想 MHD 区域
0.1 – 100 AU：非理想 MHD 区域
100 AU
欧姆耗散
霍尔效应
双极扩散
欧姆耗散
霍尔效应
双极扩散
z（高度）
R（距中心的半径）

1 理想 MHD 方程

IDEAL MHD IN GAUSSIAN UNITS

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi}$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

动力学变量

ρ：密度，v：速度，P：气压
B：磁场，Φ：引力势

热力学闭合

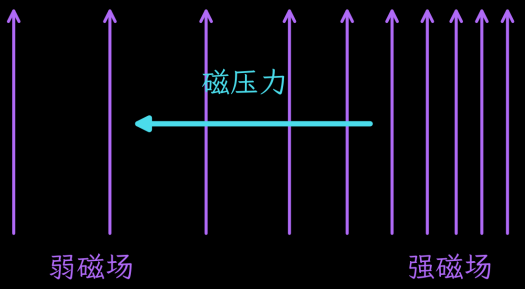
还需能量方程与状态方程

2 磁压与磁张力

MAGNETIC PRESSURE AND TENSION

$$\frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} = -\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{4\pi}$$

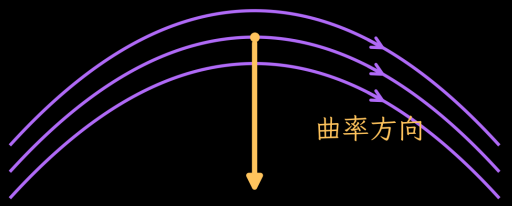
磁压：强场 → 弱场



$$\mathbf{f}_{\mathrm{mag,P}} = -\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

磁压梯度推动流体；单位：力 / 体积

磁张力：弯曲磁力线趋向拉直



磁张力指向弯曲内侧

$$\mathbf{f}_{\mathrm{mag,T}} = \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}{4\pi}$$

示意：磁场强度近似恒定，突出曲率力

3 磁场强度和特征速度

ALFVÉN SPEED AND PLASMA BETA

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad \beta = \frac{8\pi P}{B^2} = \frac{2c_s^2}{v_A^2}$$

Alfvén 速度

磁张力传递扰动的特征速度
磁场越强或密度越低，vA 越大

等温气体中的 β

β≫1：气压大于磁压
β≲1：磁压具有重要动力学作用

4 慢磁声点与快磁声点

SLOW AND FAST MAGNETOSONIC POINTS

磁声波：气压与磁力（磁压力和磁张力）共同参与的压缩扰动

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2}\left[c_s^2 + v_A^2 \pm \sqrt{(c_s^2 + v_A^2)^2 - 4c_s^2 v_{A,n}^2}\right]$$

$$v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}, \qquad v_{A,n}^2 = \frac{(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2}{4\pi\rho}$$

加号为快波，减号为慢波。n 为传播方向，声速由热力学闭合决定。

慢磁声点

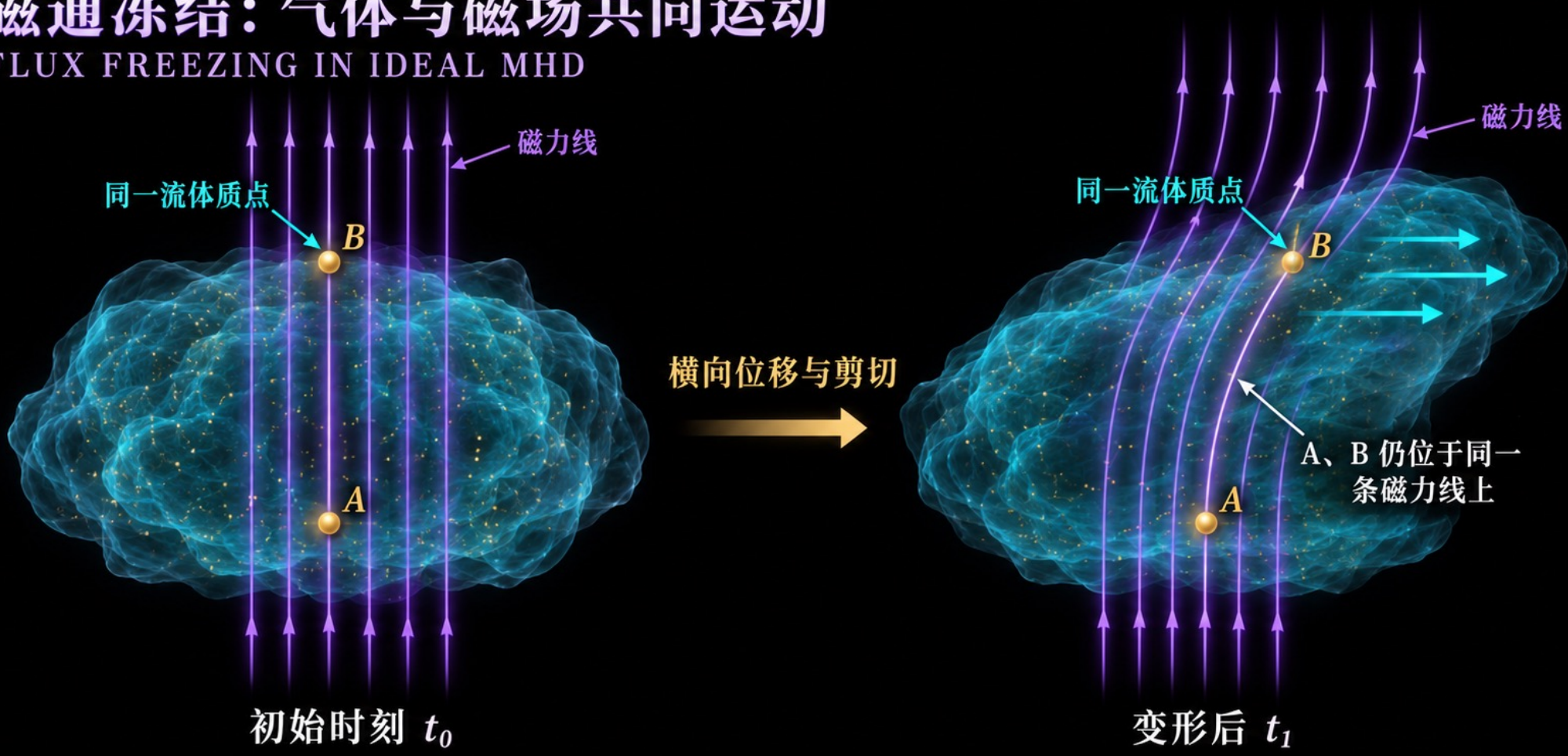
流速等于沿该方向的慢磁声速度

快磁声点

流速等于沿该方向的快磁声速度

磁通冻结：气体与磁场共同运动

FLUX FREEZING IN IDEAL MHD



横向运动：气体与磁力线一起移动和变形 | 沿线运动：气体仍可沿磁力线流动

理想 MHD · 光滑流动

5 电离与复合平衡

IONIZATION AND RECOMBINATION BALANCE

电离产生电子与离子，复合使它们重新成为中性粒子

$$\frac{dn_e}{dt} = \underbrace{\zeta n_n}_{\text{ionization}} - \underbrace{\alpha_{\text{rec}} n_e n_i}_{\text{recombination}}$$

电离产生率

ζ：每个中性粒子的电离率，单位 s^{-1}
n_n：中性粒子的数密度
ζn_n：单位体积、单位时间产生的电子数

复合消耗率

αrec：复合系数，单位 $cm^3\ s^{-1}$
n_e、n_i：电子与离子的数密度
$\alpha_{rec} n_e n_i$：单位体积、单位时间复合数

$$\frac{dn_e}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \zeta n_n = \alpha_{\text{rec}} n_e n_i$$

6 从电中性到电离度

ELECTRON FRACTION IN A WEAKLY IONIZED GAS

单电荷离子、忽略尘埃电荷：电中性给出 $n_i \simeq n_e$

$$n_i \simeq n_e \quad \Longrightarrow \quad n_e \simeq \sqrt{\frac{\zeta n_n}{\alpha_{\rm rec}}}$$

$$x_e \equiv \frac{n_e}{n_n} \simeq \sqrt{\frac{\zeta}{\alpha_{\rm rec} n_n}}$$

参数如何影响电离度

电离率 ζ 增大，电离度升高
复合系数 αrec 增大，电离度降低
气体密度增大，电子所占比例降低

$$n_e \propto n_n^{1/2}, \qquad x_e \propto n_n^{-1/2}$$

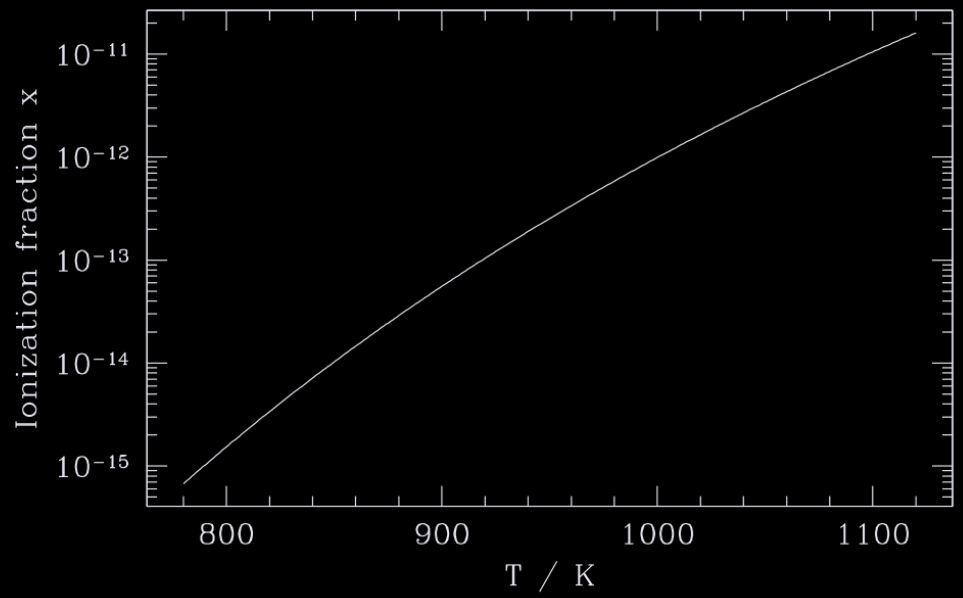
适用条件

达到局部电离与复合稳态
气相复合占主导，离子主要带单电荷
尘埃吸附及充电重要时，需扩展模型

固定 ζ 与复合系数

7 热电离与内盘耦合

THERMAL IONIZATION



温度敏感性

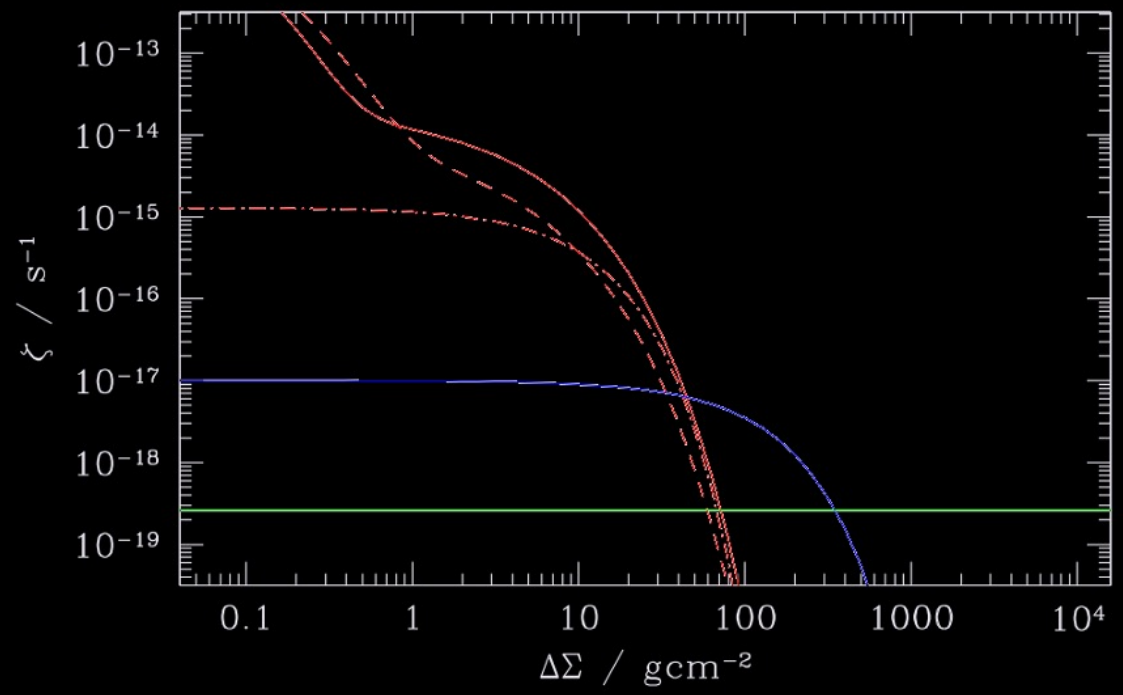
碱金属在约10^3 K开始提供电子

理想 MHD 区域

少量电子即可显著增强磁耦合
良好耦合不等于气体完全电离

8 非热电离：不同来源的穿透深度

NON-THERMAL IONIZATION AND COLUMN DENSITY



$\Delta\Sigma$：从盘表面向内累积的气体柱密度

红色：恒星 X 射线

实线：5 keV，Bai & Goodman
虚线：3 keV，Bai & Goodman
点划线：Turner & Sano 简化模型
表层电离强，随柱密度增大迅速衰减

蓝色：宇宙射线

比 X 射线穿透更深
此图假设恒星风未屏蔽入射宇宙射线

绿色：放射性衰变

短寿命核素在盘内提供电离
此模型将电离率近似取为常数

9 弱电离气体：磁力如何传给中性组分

LORENTZ FORCE AND COLLISIONAL MOMENTUM TRANSFER

1 带电组分的力平衡

$$0 = Zen_i(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}/c) - \mathbf{p}_{in}$$

$$0 = -en_e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}/c) - \mathbf{p}_{en}$$

忽略电子、离子的惯性与压强梯度
保留洛伦兹力及与中性粒子的碰撞
p_{in}、p_{en} 表示带电组分传给中性的力密度

2 相加，电场力抵消

$$n_e = Zn_i, \quad \mathbf{J} = en_e(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$$

$$\mathbf{p}_{in} + \mathbf{p}_{en} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}/c$$

电中性使离子与电子的电场力抵消
磁场力相加后得到 J×B/c
碰撞将这份动量传给中性组分

3 中性气体接收碰撞力

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}$$

近似：$\rho \simeq \rho_n$，$v \simeq v_n$，$P \simeq P_n$，带电组分动量快速弛豫

10 磁化：回旋运动与中性碰撞的竞争

MAGNETIZATION OF ELECTRONS AND IONS

磁化描述粒子是否受磁场约束

$$\omega_{cs} = \frac{|q_s|B}{m_s c}, \qquad \beta_s = \frac{\omega_{cs}}{\nu_{sn}} \quad (s = e, i)$$

ωcs：回旋角频率，vsn：与中性气体交换动量的碰撞频率

$$\beta_s \gg 1 : \ \omega_{cs}^{-1} \ll \nu_{sn}^{-1}, \qquad \beta_s \ll 1 : \ \omega_{cs}^{-1} \gg \nu_{sn}^{-1}$$

βs ≫ 1：已磁化

碰撞前能积累显著回旋运动

βs ≪ 1：未磁化

碰撞在回旋形成前打乱运动
粒子主要受中性气体碰撞约束
电子质量小，比离子更易磁化

11 三种非理想效应的典型主导情形

OHMIC, HALL AND AMBIPOLAR REGIMES

比较电子与离子的磁化状态，可识别典型的主导效应

主导效应	电子	离子	主导的相对运动
欧姆耗散	βe ≪ 1	βi ≪ 1	碰撞主导
Hall 效应	βe ≫ 1	βi ≪ 1	电子随磁场运动，离子跟随中性气体
双极扩散	βe ≫ 1	βi ≫ 1	电子、离子都跟随磁场运动

$$\frac{\eta_H}{\eta_O} \simeq \beta_e, \qquad \frac{\eta_A}{\eta_H} \simeq \beta_i$$

12 非理想感应方程与中性参考系电场

INDUCTION EQUATION AND THE ELECTRIC FIELD E′

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_n \times \mathbf{B} - c\mathbf{E}'), \qquad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_n \times \mathbf{B}}{c}$$

E′ 为中性气体参考系中的电场

$$\mathbf{E}' = \frac{4\pi}{c^2}\left[\eta_O \mathbf{J} + \eta_H \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{b}} - \eta_A (\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{b}}) \times \hat{\mathbf{b}}\right]$$

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{B}, \qquad \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$$

记号与单位

vn：中性气体速度，J：物理电流密度
ηO、ηH、ηA：磁扩散率，单位 $cm^2\ s^{-1}$
忽略位移电流，磁场满足 $\nabla \cdot B = 0$

三项的含义

欧姆项与双极项产生耗散
Hall 项本身不直接耗散电磁能

13 欧姆耗散：碰撞阻碍电流

OHMIC DIFFUSION

电子与中性粒子碰撞产生有限电阻

$$\eta_O \simeq \frac{c^2 m_e \nu_{en}}{4\pi e^2 n_e}, \qquad \mathbf{E}'_O = \frac{4\pi\eta_O}{c^2}\mathbf{J}$$

$$Q_O = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}'_O = \frac{4\pi\eta_O}{c^2}J^2 \geq 0$$

ven：电子与中性的动量交换频率，Q：单位体积的加热率

典型耦合状态

βe ≪ 1，βi ≪ 1
电子与离子均未磁化
电子相对离子的漂移承载电流
碰撞将有序漂移能转化为热

14 Hall 效应：电子与离子相对漂移

HALL EFFECT

电子受磁场约束，离子受中性粒子碰撞约束

$$\mathbf{J} = en_e(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \qquad \mathbf{v}_i \simeq \mathbf{v}_n \implies \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n \simeq -\frac{\mathbf{J}}{en_e}$$

$$\mathbf{E}'_H = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e c}, \qquad \eta_H = \frac{cB}{4\pi e n_e}, \qquad Q_H = 0$$

单电荷离子、忽略尘埃电荷时，电中性给出 ne = ni

典型耦合状态

βe ≫ 1，βi ≪ 1
电子磁化，离子未磁化
离子速度较接近中性气体速度
磁场随电子输运，与中性气体滑移

15 双极扩散：带电组分与中性气体滑移

AMBIPOLAR DIFFUSION

电子与离子都已磁化，磁场推动带电组分并通过碰撞拖动中性气体

$$\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{B}}{c}\simeq\gamma\rho_i\rho_n(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_n)$$

$$\eta_A\simeq\frac{B^2}{4\pi\gamma\rho_i\rho_n},\qquad Q_A=\gamma\rho_i\rho_n|\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_n|^2=\frac{4\pi\eta_A}{c^2}J_\perp^2$$

γ：离子与中性气体的阻力系数，ρi、ρn：两组分的质量密度

典型耦合状态

βe ≫ 1，βi ≫ 1
电子、离子的垂直运动均受磁场约束
带电组分相对中性气体整体漂移

16 Elsasser number

COUPLING STRENGTH AND NET VERTICAL MAGNETIC FLUX

$$\Lambda_O = \frac{v_A^2}{\Omega \eta_O}, \qquad \chi_H = \frac{v_A^2}{\Omega |\eta_H|}, \qquad \mathrm{Am} = \frac{v_A^2}{\Omega \eta_A} \simeq \frac{\gamma \rho_i}{\Omega}$$

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad \nu_{ni} = \gamma \rho_i$$

磁场变化能否跟上轨道动力学?

$$\ell_A = \frac{v_A}{\Omega}, \quad t_{\mathrm{dyn}} = \Omega^{-1}, \quad \frac{t_\eta}{t_{\mathrm{dyn}}} = \frac{\ell_A^2/\eta}{\Omega^{-1}} = \frac{v_A^2}{\Omega \eta}$$

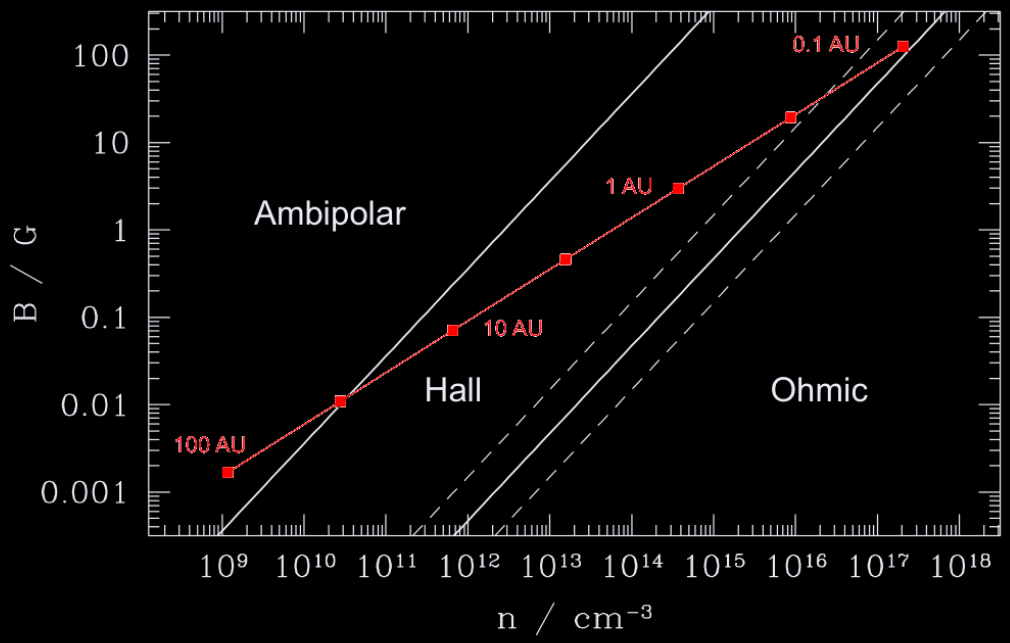
耦合参数的含义

ΛO、Am 大：在 ℓA 尺度上耗散较慢
ΛO、Am 小：欧姆或双极效应更显著
Am 表示中性粒子在动力学时间内
与离子交换动量的有效次数

Ω：轨道角频率，η：磁扩散率。Hall 不耗散。

17 三种非理想效应的主导区域

ORDERING THE NON-IDEAL TERMS

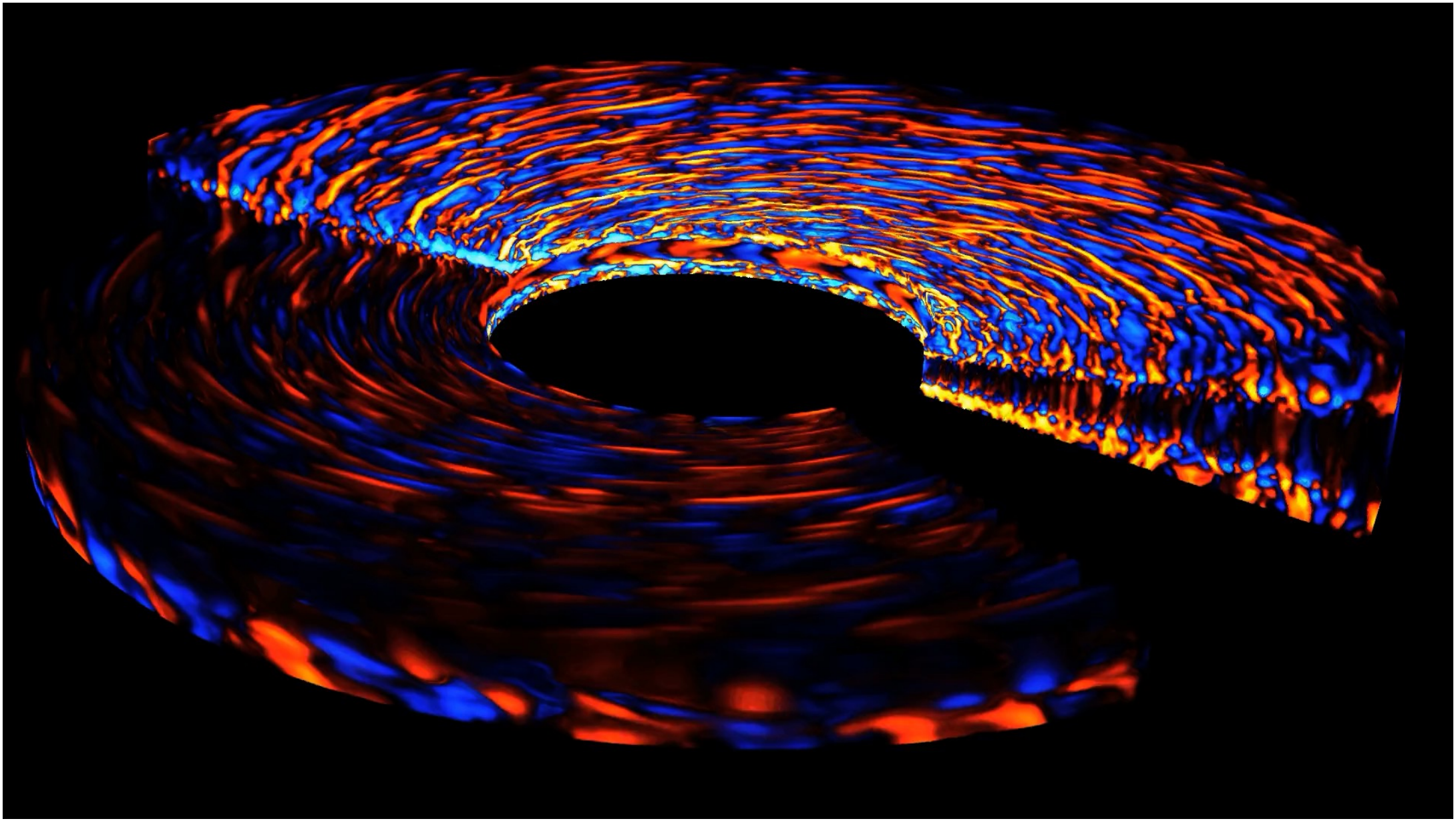


趋势

高密度与弱场：欧姆更重要
中间区域：Hall更重要
低密度与较强场：双极更重要

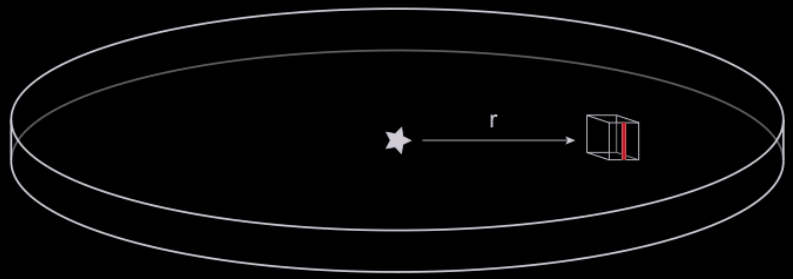
径向分区和垂直分层都依赖气体密度、磁场与电离结构。

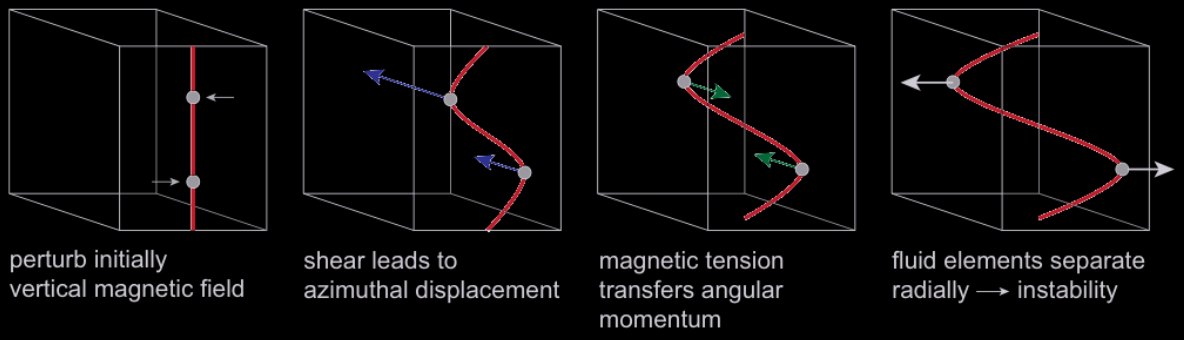

原行星盘中的磁流体
恒星 FUV / X 射线
宇宙射线
电离表层 · 磁场耦合
低密度 · 高电离度 ·
弱电离中层 ·
高密度 · 低电离度 · 非理想 MHD 主导
0.1 AU
0.1 AU
欧姆耗散
充分电离 · 理想 MHD
100 AU
0.1 – 100 AU：非理想 MHD 区域
0.1 – 100 AU：非理想 MHD 区域
100 AU
欧姆耗散
霍尔效应
双极扩散
欧姆耗散
霍尔效应
双极扩散
z（高度）
R（距中心的半径）



20 磁张力为何放大径向位移

MAGNETIC TENSION AND ANGULAR MOMENTUM EXCHANGE





内侧流体：失去角动量

外侧流体：获得角动量

能量来自差异旋转

21 MRI：差异旋转盘中的磁不稳定性

MAGNETOROTATIONAL INSTABILITY

弱磁场能改变盘的稳定性，并提供角动量输运机制

$$q = -\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}, \quad \kappa^2 = 2(2-q)\Omega^2, \quad q_{\rm Kep} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{d(r^2\Omega)^2}{dr} > 0 \quad \text{but} \quad \frac{d\Omega^2}{d\ln r} < 0$$

无磁场：Rayleigh 稳定

比角动量 $l = r^2\Omega$ 随半径增大
$\kappa^2 > 0$，即 $q < 2$
开普勒盘 $q = 3/2$ 满足此条件

有磁场：可能出现 MRI

角速度随半径减小，即 $q > 0$
磁张力连接不同半径的流体
只有合适波长的扰动会增长

这里推导 $0 < q < 2$ 的理想、轴对称、垂直磁场 MRI

22 局部模型：理想 MHD 基本方程

LOCAL SHEARING BOX AND GOVERNING EQUATIONS

x：径向，y：方位，z：垂直。参考系以 Ω 绕恒星旋转。

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} = 2q\Omega^2 x\hat{\mathbf{x}} - \nabla\Pi + \frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}}{4\pi\rho_0}$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\Pi = \frac{P}{\rho_0} + \frac{B^2}{8\pi\rho_0}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$$

模型假设

ρ0 为常数，采用不可压缩近似
忽略垂直分层、黏性与非理想项
压强作为不可压缩约束，不另解能量

各项物理含义

2Ω×v：科里奥利项
2qΩ²x：局部径向潮汐加速度
Π：气压与磁压，最后一项为磁张力

23 稳态背景与扰动形式

EQUILIBRIUM AND NORMAL-MODE PERTURBATIONS

$$\mathbf{v}_0 = -q\Omega x\hat{\mathbf{y}}, \qquad \mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}, \qquad \rho = \rho_0$$

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_0 = 2q\Omega^2 x\hat{\mathbf{x}}, \qquad \nabla\Pi_0 = 0$$

轴对称扰动，只依赖 z 与 t

$$\delta\mathbf{v} = (u_x, u_y, 0)e^{st+ikz}, \qquad \frac{\delta\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = (b_x, b_y, 0)e^{st+ikz}$$

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad K = kv_A, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \;\Rightarrow\; \text{instability}$$

均匀垂直场不产生背景洛伦兹力
背景剪切满足潮汐力与科里奥利平衡

k ≠ 0 时，散度约束给出 uz = bz = 0
bx、by 具有速度单位，并非原始磁场

s 为复增长率。Re(s) > 0 表示小扰动随时间指数增长。

24 MRI 的四个线性方程

LINEARIZED MOMENTUM AND INDUCTION EQUATIONS

$$
\begin{aligned}
su_x - 2\Omega u_y &= iKb_x \\
su_y + (2-q)\Omega u_x &= iKb_y \\
sb_x &= iKu_x \\
sb_y &= -q\Omega b_x + iKu_y
\end{aligned}
$$

动量方程：流体响应

−2Ωuy：径向科里奥利耦合
(2−q)Ωux：旋转与背景剪切
iKbx、iKby：磁张力扰动

感应方程：磁场响应

iKux：横向运动弯曲垂直场
−qΩbx：剪切把径向场绕成方位场
iKuy：方位运动改变方位磁场

K = kvA 为 Alfvén 频率，u 为速度扰动，b = δB/√(4πρ0)

径向、方位速度与磁场相互耦合，形成 MRI 的反馈。

25 消元、色散关系与不稳定条件

DISPERSION RELATION AND INSTABILITY CRITERION

由感应方程消去 bx、by，保留 ux、uy

$$(s^2 + K^2)u_x - 2\Omega s u_y = 0$$

$$s(s^2 + K^2)u_y + \left[(2-q)\Omega s^2 - q\Omega K^2\right] u_x = 0$$

$$s^4 + (\kappa^2 + 2K^2)s^2 + K^2(K^2 - 2q\Omega^2) = 0$$

非零扰动要求系数矩阵行列式为零，得到上述四次多项式

$$0 < K^2 < 2q\Omega^2, \qquad 0 < q < 2$$

$\kappa^2 > 0$ 时，前两项系数为正
常数项为负，便存在 $s^2 > 0$ 的根

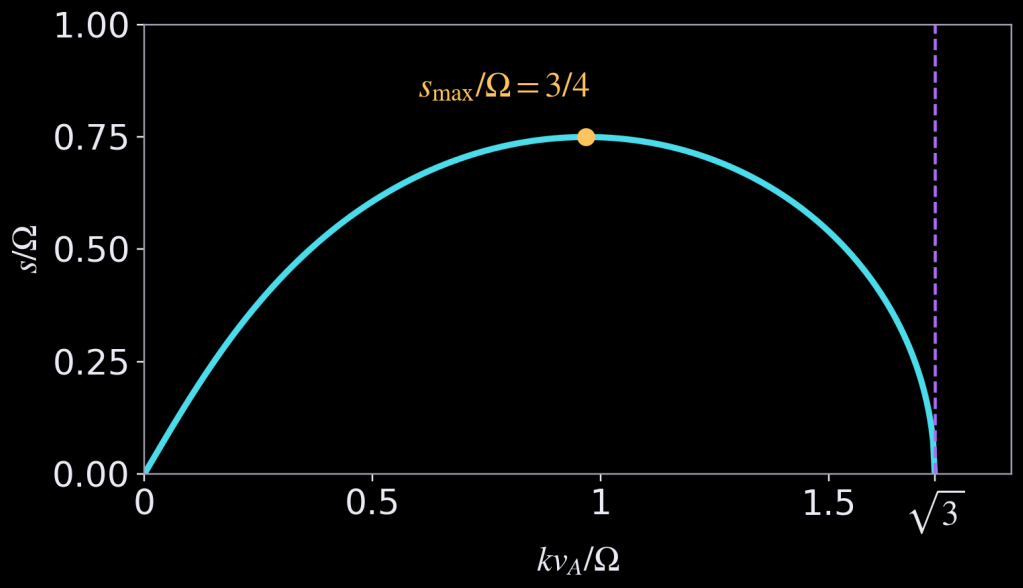
K^2 太大：磁张力过强，扰动稳定
$q = 0$：无差异旋转，不能驱动 MRI

开普勒盘：$0 < (kvA)^2 < 3\Omega^2$。$k = 0$ 为边界，不能产生增长。

26 增长率与最快增长的波长

MRI GROWTH RATE IN A KEPLERIAN DISK

$$\frac{s^2}{\Omega^2} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{kv_A}{\Omega}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\left(\frac{kv_A}{\Omega}\right)^2} \quad (q = 3/2)$$



最快增长：一般 q

$$s_{\max} = \frac{q}{2}\Omega$$

$$(kv_A)^2_{\max} = \frac{q(4-q)}{4}\Omega^2$$

开普勒盘 q = 3/2

$$s_{\max} = \frac{3}{4}\Omega$$

$$(kv_A)_{\max} = \frac{\sqrt{15}}{4}\Omega$$

增长时间 1/smax = 4/(3Ω)

长波耦合弱，短波磁张力强，最快增长出现在两者之间。

27 MRI 的角动量输运与适用边界

ANGULAR MOMENTUM TRANSPORT AND LIMITS

$$T_{xy} = \rho_0 \langle u_x u_y \rangle - \frac{\langle \delta B_x \delta B_y \rangle}{4\pi}, \qquad \dot{E}_{\mathrm{shear}} = q\Omega T_{xy}$$

$$\lambda_{\mathrm{MRI}} \sim \frac{2\pi v_A}{\Omega}, \qquad \Lambda_O = \frac{v_A^2}{\eta_O \Omega}$$

向外输运与能量来源

Txy > 0 表示径向向外输运角动量
Reynolds 应力来自速度相关
Maxwell 应力来自磁场相关
qΩTxy 表示从背景剪切提取能量

原行星盘中的限制

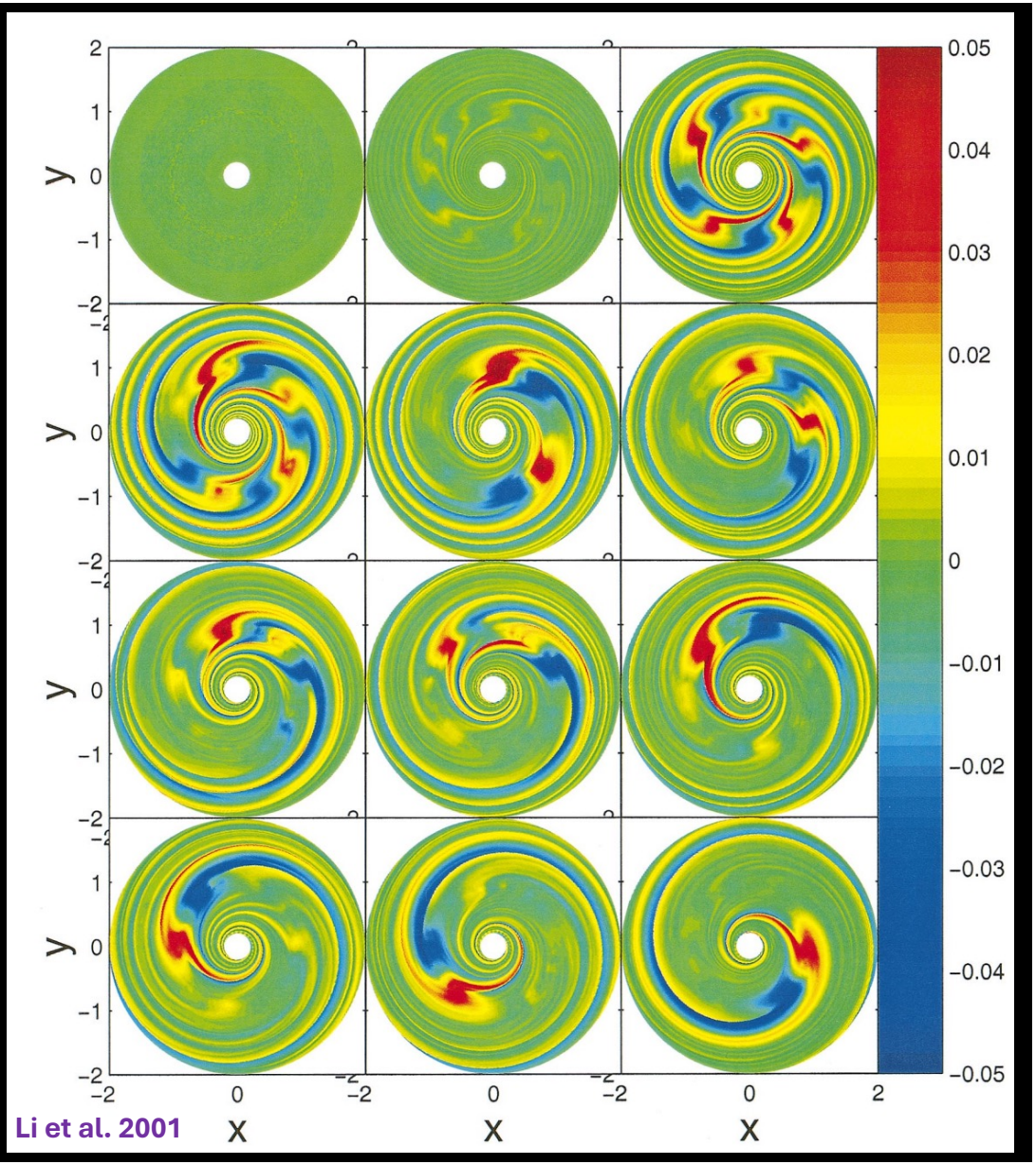
不稳定波长须能容纳于盘厚或计算域
欧姆、双极效应可能削弱或抑制 MRI
Hall 效应依赖磁场极性，需单独分析
线性增长不能确定饱和湍流强度

ΛO 是耦合指标，不能单独判定所有磁场几何与非理想情形的稳定性。

Rossby Wave Instability

RWI





Li et al. 2001

1 RWI：原行星盘中的 Rossby 波不稳定性

ROSSBY WAVE INSTABILITY

局部径向结构可以使小的非轴对称扰动指数增长

$$\eta \equiv \frac{(\nabla \times \mathbf{v})_z}{\Sigma}, \qquad \frac{D\eta}{Dt} = 0, \qquad P = P(\Sigma)$$

η 为涡度除以面密度，通常称为 vortensity（位涡）。

可能出现的位置

行星开缝后的间隙边缘
黏性跃迁或物质堆积形成的压力结构
是否不稳定取决于完整的径向剖面

本节采用的模型

二维薄盘，忽略黏性、自引力与磁场
采用正压关系 P = P(Σ)
研究 m ≥ 1 的非轴对称扰动

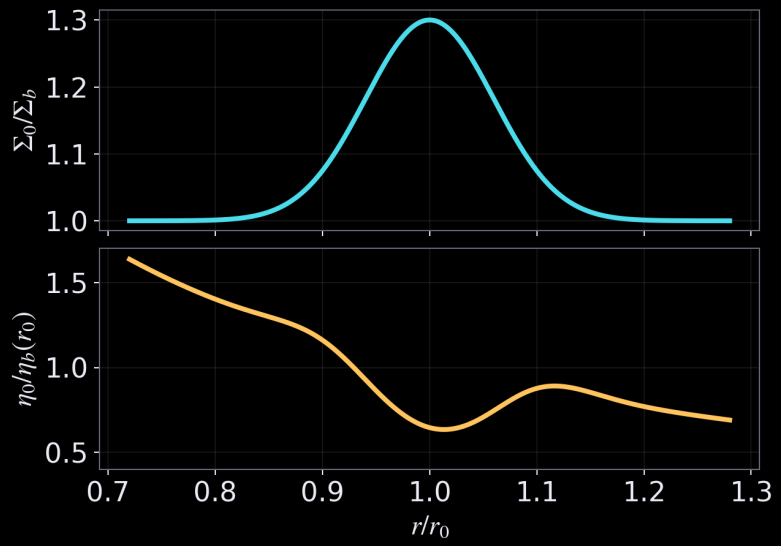
RWI 的能量来自差异旋转。位涡的径向结构决定 Rossby 波的传播与耦合。

2 稳态背景：密度峰与位涡极小值

PRESSURE-SUPPORTED AXISYMMETRIC EQUILIBRIUM

$$\Sigma_0 = \Sigma_b\left[1 + Ae^{-(r-r_0)^2/(2w^2)}\right], \qquad P_0 = c_s^2\Sigma_0$$

$$\Omega^2 = \frac{GM_*}{r^3} + \frac{1}{r\Sigma_0}\frac{dP_0}{dr}, \qquad \kappa^2 = \frac{1}{r^3}\frac{d(r^4\Omega^2)}{dr}$$



径向力平衡

$v_{r,0} = 0$，$v_{\phi,0} = r\Omega(r)$

压力梯度修正开普勒旋转

c_s 在本模型中为常数

$$\eta_0 = \frac{\kappa^2}{2\Omega\Sigma_0}, \qquad \kappa^2 > 0$$

图示参数 A = 0.3，w/r0 = 0.06

$c_s/(r_0\Omega_{K,0}) = 0.05$

图示背景满足 $\kappa^2 > 0$，轴对称离心稳定性与 RWI 的非轴对称稳定性不同。

3 扰动形式与三个线性方程

NORMAL MODES AND LINEARIZED FLUID EQUATIONS

$$\delta X = \hat{X}(r) e^{i(m\phi - \omega t)}, \quad \omega = \omega_r + i\gamma, \quad \widetilde{\omega} = \omega - m\Omega$$

$$W \equiv \frac{\delta P}{\Sigma_0} = c_s^2 \frac{\delta \Sigma}{\Sigma_0}, \qquad u = \delta v_r, \quad v = \delta v_\phi$$

$$-i\widetilde{\omega}\,\delta\Sigma + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\Sigma_0 u) + \frac{im\Sigma_0}{r} v = 0$$

$$-i\widetilde{\omega}\,u - 2\Omega v = -\frac{dW}{dr}$$

$$-i\widetilde{\omega}\,v + \frac{\kappa^2}{2\Omega} u = -\frac{im}{r} W$$

质量守恒

径向与方位通量改变 δΣ

径向与方位动量

科里奥利项与回转项耦合 u、v
压强扰动提供空间梯度力

γ > 0 表示不稳定。m 为方位波数，波形以 Ωp = ωr/m 旋转。

4 消元：RWI 的径向本征方程

GLOBAL RADIAL EIGENVALUE PROBLEM

由两个动量方程求出 u、v

$$u = \frac{i}{D}\left(\widetilde{\omega}W' - \frac{2m\Omega}{r}W\right), \qquad D \equiv \kappa^2 - \widetilde{\omega}^2$$

$$v = \frac{1}{D}\left(\frac{\kappa^2}{2\Omega}W' - \frac{m\widetilde{\omega}}{r}W\right)$$

代入连续性方程，并使用 $\delta\Sigma = \Sigma_0 W/c_s^2$

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(\frac{r\Sigma_0}{D}\frac{dW}{dr}\right) - \left[\frac{m^2\Sigma_0}{rD} + \frac{r\Sigma_0}{c_s^2} + \frac{2m}{\widetilde{\omega}}\frac{d}{dr}\left(\frac{\Sigma_0\Omega}{D}\right)\right]W = 0}$$

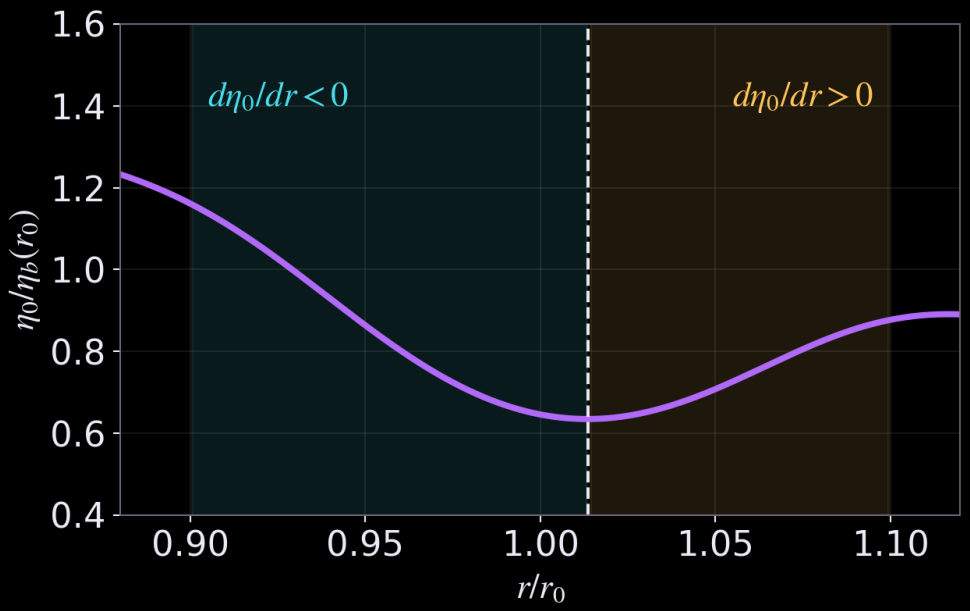
$$\Omega(r_c) = \frac{\omega_r}{m}, \qquad \left.\frac{\Sigma_0\Omega}{D}\right|_{\widetilde{\omega}=0} = \frac{1}{2\eta_0}$$

给定背景与径向边界条件，求复本征频率 ω。γ > 0 的本征模即为不稳定模。

5 Rossby 波如何耦合并增长

VORTENSITY GRADIENTS AND WAVE COUPLING

$$-i\tilde{\omega}\,\delta\eta + u\frac{d\eta_0}{dr} = 0, \qquad \delta\eta = -\xi_r\frac{d\eta_0}{dr}$$



极小值内侧

位涡梯度为负
相对于局部流体，Rossby 波具有一个方向的方位传播

极小值外侧

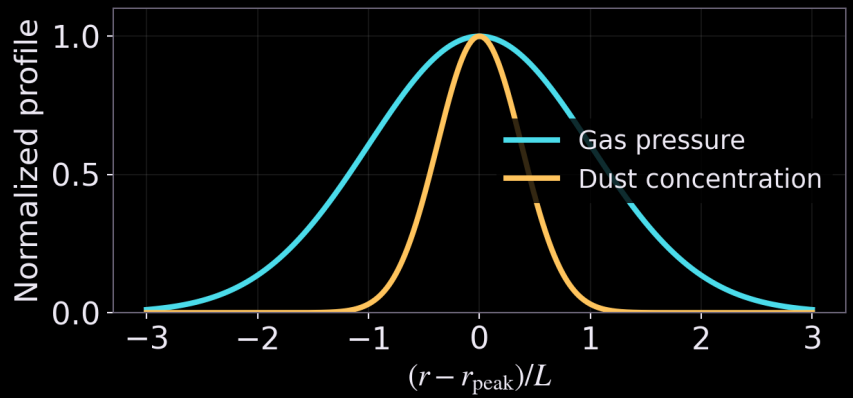
位涡梯度为正，内禀传播反向
合适的结构使两侧波相互作用锁定同一图样速度并共同增长

6 非线性演化：涡旋与尘埃捕获

VORTICES, PRESSURE MAXIMA AND DUST TRAPPING

气体中的非线性结构

线性扰动增长后可形成多个涡旋
涡旋可能合并，并激发螺旋密度波
寿命受三维效应、扩散与尘埃反馈影响



尘埃的阻力响应

压力最大处，气体的压强力改变
尘埃与气体的速度差驱动颗粒漂移
涡旋中的压力峰可以聚集尘埃

$$\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g \simeq \frac{t_s}{\rho_g}\nabla P_g, \qquad \mathrm{St} = t_s\Omega \ll 1$$

局部紧耦合近似
忽略尘埃反馈，t_s 为停止时间
漂移指向气体压力较高处

图示仅说明压力捕获，宽度为示意。毫米连续谱中的亮团本身不能唯一确认 RWI。

7 稳定性判断与观测检验

CRITERIA, MODEL LIMITS AND REFERENCES

$$\frac{d\eta_0}{dr} = 0 \text{ somewhere}, \qquad \gamma = \operatorname{Im}\omega > 0$$

理论上如何判断

建立包含压力修正的稳态旋转剖面
检查位涡极值与 $\kappa^2 > 0$
求满足径向边界条件的增长本征模
改变结构宽度和幅度，检验增长阈值

观测上如何检验

尘埃团块与气体压力结构是否对应
气体运动学是否支持涡旋解释
多波段尘埃分布是否显示粒径分选
连续谱不对称也可能有其他起源

参考文献

Lovelace et al. (1999), ApJ 513, 805 · arXiv:astro-ph/9809321
Li et al. (2000), ApJ 533, 1023 · arXiv:astro-ph/9907279
Li et al. (2001), ApJ 551, 874 · arXiv:astro-ph/0012479