Rossby 波不稳定性

Rossby Wave Instability

Lecture 06

流体力学方程

连续方程、动量方程与等温状态方程。

Rossby wave instability (pure gas)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + 3\Omega^2 x \boldsymbol{e}_x$$

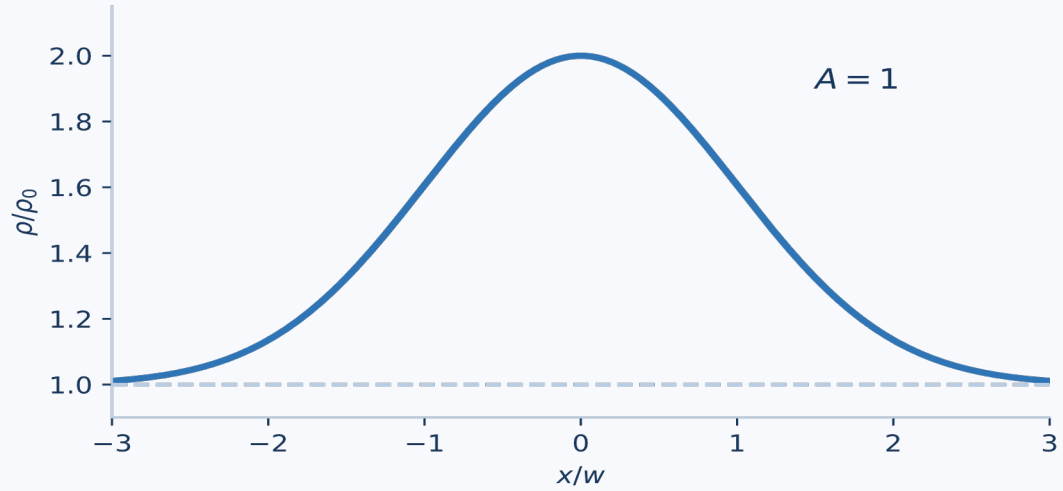
$$P = \rho c_s^2$$

在共转坐标系中保留压强、科里奥利项与径向潮汐项。

盘稳态模型：高斯密度峰

密度随径向坐标 x 变化。

密度剖面



给定的盘模型

$$\rho = \rho_0 \left[1 + A \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right)\right]$$

ρ ≠ constant

左图为 A = 1 的示意

密度峰的幅度为 A，宽度为 w。

平衡态

平衡态条件

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} v_x, \qquad v_x = 0$$

径向力平衡

$$2\Omega v_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - 3\Omega^2 x$$

$$v_y(x) = -\frac{3}{2}\Omega x + \frac{1}{2\Omega\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

v_y由开普勒剪切项与压强梯度项共同决定。

扰动与模态形式

背景量与扰动量

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}(x, y, t)$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho(x, y, t)$$

$$P = P_0 + \delta P(x, y, t)$$

模态形式

$$\delta\boldsymbol{v} \propto f(x)\exp(ik_y y - i\omega t)$$

$$\omega = \omega_r + i\gamma$$

径向依赖保留为函数 f(x)

线性化方程

径向微分方程

$$-i\Delta\omega\,\delta\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\delta v_x) + ik_y\rho\delta v_y = 0$$

$$-i\Delta\omega\,\delta v_x - 2\Omega\delta v_y + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\delta P}{\partial x} - \frac{\delta\rho}{\rho^2}\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$-i\Delta\omega\,\delta v_y + \delta v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + 2\Omega\delta v_x + \frac{ik_y}{\rho}\delta P = 0$$

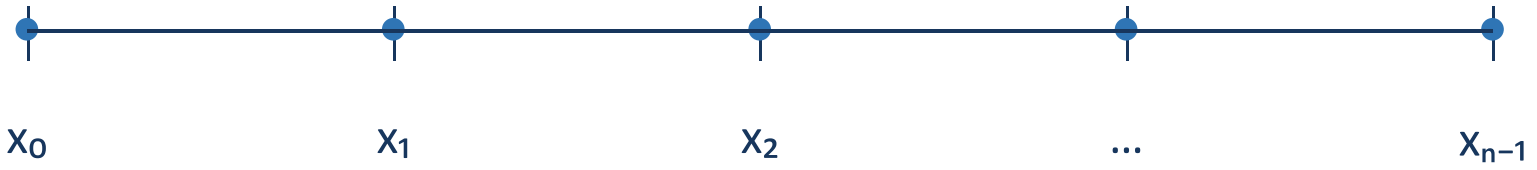
$$\delta P = c_s^2\delta\rho$$

$\Delta\omega(x) = \omega - k_y v_y(x)$

径向网格与离散化

将扰动量采样在间距为 h 的径向网格上。

$$\rho'_n = \rho'(x_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$



$$x_{n+1} - x_n = h$$

每个网格点对应一个位置 x_n。

矩阵形式

按 δv_x、δv_y、$\delta\rho$ 的顺序排列所有网格值。

扰动方程的分块矩阵

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\vec{v}_x \\ \delta\vec{v}_y \\ \delta\vec{\rho} \end{bmatrix} = 0$$

A 为 3N × 3N 矩阵，每个 A_{ij} 块包含 N × N 个系数。**每一行对应一个公式。**

子矩阵与网格方程

每一行表示一个特定网格点上的方程。

N × N 子矩阵 A_{ij}

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij;0,0} & A_{ij;0,1} & \cdots & A_{ij;0,N-1} \\ A_{ij;1,0} & A_{ij;1,1} & \cdots & A_{ij;1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ij;N-1,0} & A_{ij;N-1,1} & \cdots & A_{ij;N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

行索引对应方程所在网格点，列索引对应参与计算的未知量。

一阶导数

导数采用中心差分近似

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{2h}$$

微分算子

$$g(x)\frac{d}{dx}$$

矩阵系数

$$A_{ij;n,n-1} \mathrel{-}= \frac{g(x_n)}{2h}$$

$$A_{ij;n,n+1} \mathrel{+}= \frac{g(x_n)}{2h}$$

一阶导数将同一未知量在左右相邻网格点上的值耦合起来。

二阶导数与零阶项

$$f''(x_n) \simeq \frac{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1})}{h^2}$$

二阶算子

$$g(x)\frac{d^2}{dx^2}$$

$$A_{ij;n,n-1} \mathrel{+}= \frac{g(x_n)}{h^2}$$

$$A_{ij;n,n} \mathrel{-}= \frac{2g(x_n)}{h^2}$$

$$A_{ij;n,n+1} \mathrel{+}= \frac{g(x_n)}{h^2}$$

零阶项

$$g(x) \quad \Longrightarrow \quad A_{ij;n,n} \mathrel{+}= g(x_n)$$

本征值与本征函数

求解本征值 ω

$$\det A = 0$$

solve for eigenvalue

求解本征函数

$$A\vec{x} = 0$$

solve for eigenfunctions

从微分式到网格式：continuity eq 举例

直接对乘积 $\rho\delta v_x$ 作中心差分。

$$-i\Delta\omega\,\delta\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\delta v_x) + ik_y\rho\delta v_y = 0$$

内部网格点 x_n 上的离散方程

$$\begin{aligned} &-i[\omega - k_y v_y(x_n)]\delta\rho(x_n) \\ &+\frac{\rho(x_{n+1})\delta v_x(x_{n+1}) - \rho(x_{n-1})\delta v_x(x_{n-1})}{2h} \\ &+ik_y\rho(x_n)\delta v_y(x_n) = 0 \end{aligned}$$

从微分式到网格式：continuity eq 举例

将连续方程分配到第 0 行。

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\vec{v}_x \\ \delta\vec{v}_y \\ \delta\vec{\rho} \end{bmatrix} = 0$$

N = 5

矩阵示例 · 五个网格点

A_{01} 乘以 δv_y

$$
A_{01}\delta\vec{v}_y = ik_y
\begin{matrix}
n=0 \\ n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4
\end{matrix}
\begin{bmatrix}
* & * & * & * & * \\
0 & \rho(x_1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho(x_2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \rho(x_3) & 0 \\
 & * & * & * & *
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta v_y(x_0) \\ \delta v_y(x_1) \\ \delta v_y(x_2) \\ \delta v_y(x_3) \\ \delta v_y(x_4)
\end{bmatrix}
$$

每一行对应一个网格点

N = 5

A_{00} 乘以 δv_x

$$A_{00}\delta\vec{v}_x = \frac{1}{2h}\begin{matrix} n=0 \\ n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \end{matrix}\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ -\rho(x_0) & 0 & \rho(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(x_1) & 0 & \rho(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(x_2) & 0 & \rho(x_4) \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta v_x(x_0) \\ \delta v_x(x_1) \\ \delta v_x(x_2) \\ \delta v_x(x_3) \\ \delta v_x(x_4) \end{bmatrix}$$

每一行对应一个网格点

N = 5

矩阵示例 · 五个网格点

A_{02} 乘以 δρ

$$
A_{02}\delta\vec{\rho} = -i
\begin{array}{c}
n=0 \\ n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4
\end{array}
\begin{bmatrix}
* & * & * & * & * \\
0 & \omega - k_y v_y(x_1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \omega - k_y v_y(x_2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \omega - k_y v_y(x_3) & 0 \\
 & * & * & * & *
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta\rho(x_0) \\ \delta\rho(x_1) \\ \delta\rho(x_2) \\ \delta\rho(x_3) \\ \delta\rho(x_4)
\end{bmatrix}
$$

每一行对应一个网格点

本征值问题

N = 5：

$$\underbrace{\left[\underbrace{\frac{1}{2h}\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ -\rho(x_0) & 0 & \rho(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & -\rho(x_1) & 0 & \rho(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & -\rho(x_2) & 0 & \rho(x_4) \\ & * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A_{00}} \quad \underbrace{ik_y\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & \rho(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho(x_3) & 0 \\ & * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A_{01}} \quad \underbrace{-i\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & \Delta\omega(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\omega(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\omega(x_3) & 0 \\ & * & * & * & * \end{bmatrix}}_{A_{02}(\omega)}\right]}_{5\times 15} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\vec{v}_x \\ \delta\vec{v}_y \\ \delta\vec{\rho} \end{bmatrix}}_{\vec{x}\ (15\times 1)} = 0$$

$$\Delta\omega(x_n) = \omega - k_y v_y(x_n)$$

完整系统中的 ω

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02}(0) - i\omega I \\ A_{10}(0) - i\omega I & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21}(0) - i\omega I & A_{22} \end{bmatrix}}_{A(\omega)\ (15\times 15)} \vec{x} = 0$$

ω：本征值　x：本征函数　I：5 × 5 单位矩阵

本征值与本征函数

求解本征值 ω

$$\det A = 0$$

solve for eigenvalue

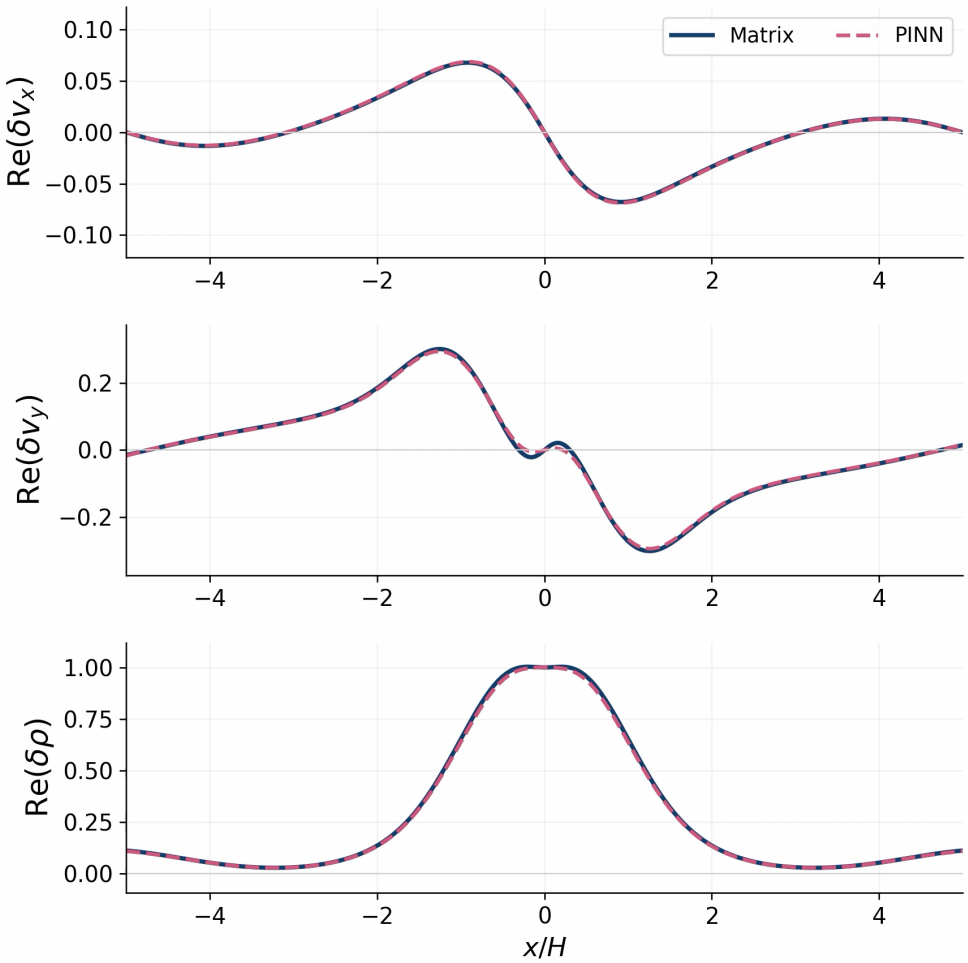
求解本征函数

$$A\vec{x} = 0$$

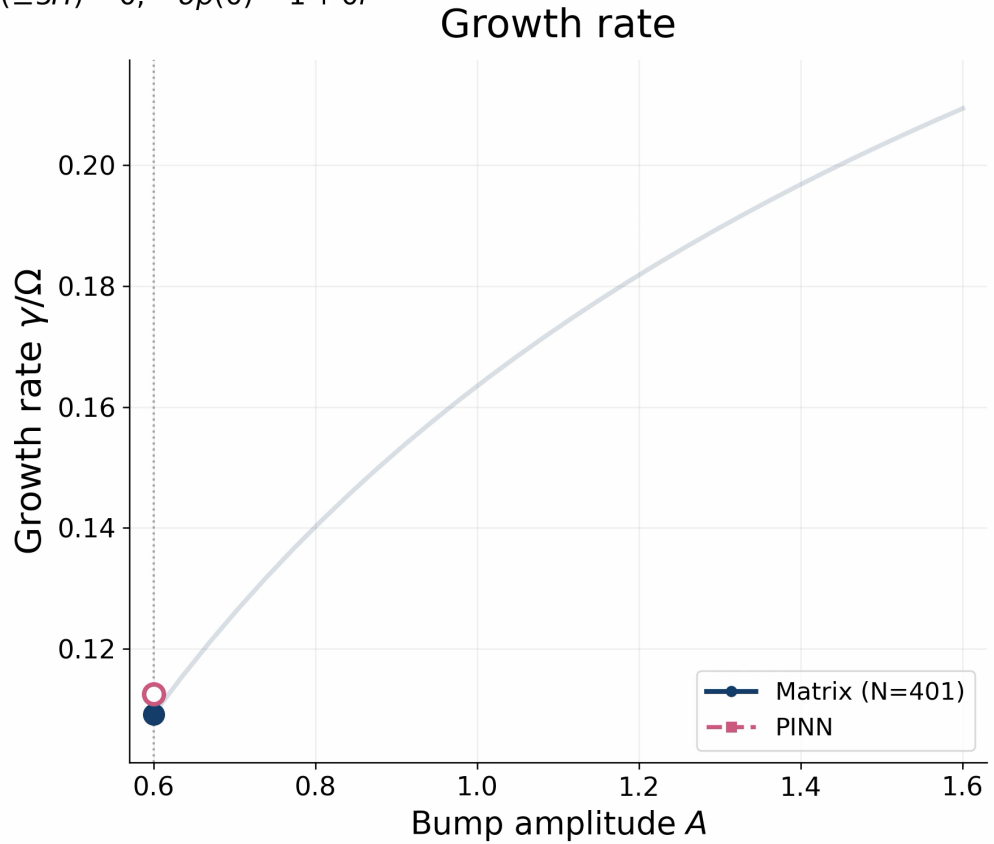
solve for eigenfunctions

RWI: matrix method and PINN A = 0.6000 (1/30)

$w/H = 0.8, \quad k_y H = 0.2, \quad \delta v_x(\pm 5H) = 0, \quad \delta\rho(0) = 1 + 0i$



Eigenfunctions: real parts



Matrix: 0.109154 Ω PINN: 0.112484 Ω

Relative growth-rate difference: 3.05%

Parameter sweep: 30 solved amplitudes